

ΘΕΜΑ Α1

α) Η ταχύτητες σε μονάδες SI θα είναι $u_1 = 4 \cdot 0.5 = 2 \text{ m/s}$ και $u_2 = 12 \cdot 0.5 = 6 \text{ m/s}$. Όταν η πρύμνη φτάσει στην έξοδο, η πλώρη έχει διανύσει απόσταση ίση με το μήκος του πλοίου: $x = 160 \text{ m}$

Με σταθερή επιτάχυνση η ταχύτητα είναι: $u_\mu = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}$

$$x = u \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{x}{u} = \frac{160}{4} = 40 \text{ s}$$

β) Η χρονική στιγμή t_2 είναι η $t_2 = 20 \text{ s}$

και η επιτάχυνση θα είναι: $a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{t_1 - t_0} = \frac{6-2}{40} = \frac{4}{40} = 0,1 \text{ m/s}^2$

$$x = u_1 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 = 2 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 20^2 = 40 + 20 = 60 \text{ m}$$

Η πλώρη είναι 60 m έξω από το κανάλι και αφού το μήκος του πλοίου είναι 160 m, μέσα στο κανάλι θα βρίσκεται $160-60=100\text{m}$.

γ) μέχρι να φτάσει η πλώρη στην έξοδο του καναλιού το πλοίο κινείται με ταχύτητα $u_1=2\text{m/s}$.

$$L = u_1 \cdot t \rightarrow t = \frac{L}{u_1} = \frac{6340}{2} = 3170 \text{ s}$$

Χρειάζεται άλλα 40 δευτερόλεπτα για να βγει εντελώς από το κανάλι άρα

$$\Delta t_{ολ} = 3170 + 40 = 3210 \text{ s ή } \Delta t_{ολ} = 53,5 \text{ min}$$

ΘΕΜΑ Α2

Στον άξονα της κίνησης εξαιτίας των δυνάμεων που ασκούνται προκύπτει μια συνισταμένη δύναμη η τιμή ης οποίας καθορίζει και το είδος της κίνησης.

Έτσι:α) Εάν η ΣF_x είναι ομόρροπη (ομόσημη της αρχικής ταχύτητας $u_0 > 0$) θα εμφανίζεται επιτάχυνση $a > 0$ με αποτέλεσμα τον μικρό χρόνο διάνυσης της πίστας. β) Αντίστροφα εάν $\Sigma F_x < 0$ οπότε και $a < 0$ στην μεγάλη μήκους πίστα το έλκηθρο θα σταματήσει ($u=0$). γ) Η ιδανική επομένως κίνηση που εξασφαλίζει τον μέγιστο χρόνο κίνησης είναι αυτή όταν $\Sigma F=0$ οπότε $u=u_0$ =σταθ.

Για αυτή την ιδεατή κίνηση θα βρούμε το συντελεστή τριβής που της αντιστοιχεί και θα τον συγκρίνουμε με τις 4 επιλογές μας ώστε να επιλέξουμε από αυτές την τιμή που τον προσεγγίζει.

Για να κατεβαίνουν οι μαθητές με σταθερή ταχύτητα η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε άξονα πρέπει να είναι μηδέν. Επιλέγουμε άξονα x παράλληλο στην πίστα (με φορά προς τα κάτω) και άξονα y κάθετο σε αυτήν. . Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι οι εξής:

- Το βάρος (κατακόρυφα προς τα κάτω)

$$W = m \cdot g = 60 \cdot 10 = 600 \text{ N με συνιστώσες } W_x = W \cdot \eta\mu 18^\circ \text{ και } W_y = W \cdot \sigma\upsilon\nu 18^\circ$$

- Η δύναμη του ανέμου (με οριζόντια κατεύθυνση σχηματίζοντας γωνία 18° με την πίστα)

$$\text{Άρα } F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu 18 \text{ και } F_y = F \cdot \eta\mu 18^\circ$$

- Η κάθετη αντίδραση N από το έδαφος
- Η τριβή ολίσθησης (με φορά προς τα πάνω)

$$T = \mu \cdot N$$

Από συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y (κάθετα στην πίστα) έχω ότι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W_y - F_y = 0 \Rightarrow 600 \cdot 0,31 - 40 \cdot 0,95 = 570 + 12,4 \Rightarrow N = 582,4 \text{ N}$$

Από συνθήκη ισορροπίας στον άξονα x (παράλληλα στην πίστα) έχω ότι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow W_x - F_x - T = 0 \Rightarrow 600 \cdot 0,31 - 40 \cdot 0,95 = 186 - 38 = 148 \text{ N}$$

Τέλος χρησιμοποιούμε τη σχέση της τριβής ολίσθησης και προκύπτει ότι:

$$\mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{148}{582,4} \approx 0,25412$$

Η τιμή του συντελεστή που βρέθηκε προσεγγίζεται με την τιμή $\mu=0,25$ του «πράσινου» έλκηθρου, το οποίο τελικά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση καθώς $0,25 < 0,25412$ αλλά με ελάχιστη επιτάχυνση, εξασφαλίζοντας και τον μέγιστο χρόνο σε σχέση με τις υπόλοιπες «επιτυχίες» καταβάσεις.

Τα έλκηθρα με $\mu < 0,25412$ δηλ. $\mu=0,20$ και $\mu=0,15$ σημειώνουν μικρότερους χρόνους, ενώ το έλκηθρο με $\mu > 0,25412$ δηλ. $\mu=0,30$ θα σταματήσει κάπου στη διαδρομή.

(ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΧΗ)

Για ευκολία ορίζουμε άξονα x παράλληλο στην πίστα με θετική φορά προς τα κάτω και άξονα y κάθετο προς αυτήν. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι οι εξής:

- Το βάρος (κατακόρυφα προς τα κάτω)

$W = m \cdot g = 60 \cdot 10 = 600 \text{ N}$ με συνιστώσες $W_x = W \cdot \eta\mu 18^\circ = 600 \cdot 0,31 = 186 \text{ N}$ και $W_y = W \cdot \sigma\upsilon\nu 18^\circ = 600 \cdot 0,95 = 570 \text{ N}$

- Η δύναμη του ανέμου (με οριζόντια κατεύθυνση σχηματίζοντας γωνία 18° με τον άξονα x)

$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu 18^\circ = 40 \cdot 0,95 = 38 \text{ N}$ και $F_y = F \cdot \eta\mu 18^\circ = 40 \cdot 0,31 = 12,4 \text{ N}$

- Η κάθετη αντίδραση (από το έδαφος, κατά τον άξονα y)

$\Sigma F_y = 0$ (Συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y) $\Rightarrow N - W_y - F_y = 0 \Rightarrow N = W_y + F_y \Rightarrow$

$N = 570 + 12,4 \Rightarrow N = 582,4 \text{ N}$

- Η τριβή ολίσθησης (αρνητική φορά στον άξονα x)

$T = \mu \cdot N \Rightarrow T = 174,72$

Στον άξονα x ισχύει ότι: $\Sigma F_x = W_x - F_x - T = 186 - 38 - T \Rightarrow \Sigma F_x = 148 - T$

Αντικαθιστώντας στην σχέση της τριβής τον συντελεστή μ για κάθε έλκθηρο προκύπτει ότι:

Κίτρινο ($\mu = 0,30$): $T = 0,30 \cdot 582,4 = 174,72 \text{ N}$ (Άρα: $\Sigma F_x = 148 - 174,72 = -26,72 \text{ N}$. Αρνητική συνισταμένη, άρα σταματάει).

Κόκκινο ($\mu = 0,15$): $T = 0,15 \cdot 582,4 = 87,36 \text{ N}$ (Άρα: $\Sigma F_x = 148 - 87,36 = 60,64 \text{ N}$)

Μπλε ($\mu = 0,20$): $T = 0,20 \cdot 582,4 = 116,48 \text{ N}$ (Άρα: $\Sigma F_x = 148 - 116,48 = 31,52 \text{ N}$)

Πράσινο ($\mu = 0,25$): $T = 0,25 \cdot 582,4 = 145,60 \text{ N}$ (Άρα: $\Sigma F_x = 148 - 145,60 = 2,40 \text{ N}$. Η μικρότερη θετική συνισταμένη, άρα η πιο αργή κάθοδος).

ΘΕΜΑ Α3

Α) Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $\Sigma F = m \cdot a \Rightarrow T - W = m \cdot a \Rightarrow T = m \cdot (g + a)$

Για τη Μέγιστη Τάση (T_{max}): Απαιτείται επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω

$$T_{max} = m \cdot (g + |a|) = 3600 \cdot (10 + 1,2) = 40.320 \text{ N}$$

Για την Ελάχιστη Τάση (T_{min}): Απαιτείται επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω.

$$T_{min} = m \cdot (g - |a|) = 3600 \cdot (10 - 1,2) = 31.680 \text{ N}$$

Β) Προτείνεται και η λύση για να μη μελετηθεί χωριστά κάθε κίνηση, να γίνει το διάγραμμα $u-t$ από όπου μέσα από τις κλίσεις που δίνουν την επιτάχυνση και το εμβαδό που δίνει τη μετατόπιση, μπορεί εύκολα να υπολογιστούν τα χρονικά διαστήματα.

Αρχικά επιταχύνεται: $t_1 = \frac{15}{1,2} = 12,5 \text{ s}$, $s_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 12,5^2 = 93,75 \text{ m}$

Έπειτα κινείται με σταθερή ταχύτητα: $s_2 = 450 - 93,75 - 93,75 = 262,5$, $t_2 = \frac{262,5}{15} = 17,5 \text{ s}$

Και τέλος επιβραδύνεται συμμετρικά με την φάση της επιτάχυνσης επομένως ο χρόνος και η απόσταση είναι ίδια

Άρα ο συνολικός χρόνος ανόδου είναι $t_{ολ1} = 12,5 + 17,5 + 12,5 = 42,5 \text{ s}$

Γ) Η ζυγαριά δείχνει την Κάθετη Αντίδραση (N). Η εξίσωση είναι ίδια με του συρματόσχοινου, αλλά για τη μάζα του επιβάτη.

Κατά την επιτάχυνση προς τα πάνω: $N_{max} = m_1 (g + |a|) = 75 (10 + 1,2) = 840 \text{ N}$

Κατά την επιβράδυνση προς τα κάτω: $N_{min} = m_1 (g - |a|) = 75 (10 - 1,2) = 660 \text{ N}$

Δ) Ο ελάχιστος χρόνος για την κάθοδο προκύπτει από το άθροισμα του χρόνου επιτάχυνσης, επιβράδυνσης και του χρόνου τον οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα: $t'_1 = \frac{12}{1,2} = 10 \text{ s}$ και $s'_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^2 = 60 \text{ m}$ Άρα $s'_2 = 450 - 60 - 60 = 330 \text{ m}$ με $t'_2 = \frac{330}{12} = 27,5 \text{ s}$ και επομένως $t_{ολ2} = 10 + 27,5 + 10 = 47,5 \text{ s}$

ΘΕΜΑ Α4

α) Θεωρούμε ως αρχή των αξόνων ($x=0$) τη θέση του σκύλου την χρονική στιγμή $t=0$. Έτσι η αρχική θέση του λαγού θα είναι ίση με $x_{02} = 6 \text{ m}$

Έτσι οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

Για τον σκύλο: $x_1 = u_1 t - \frac{1}{2} a_1 t^2 \rightarrow x_1 = 4t - 0,1t^2$ (σχέση 1)

Για τον λαγό: $x_2 = x_{02} + \frac{1}{2} a_2 t^2 \rightarrow x_2 = 6 + 0,4t^2$ (σχέση 2)

Για να συναντηθούν θα πρέπει να υπάρξει χρονική στιγμή όπου να βρίσκονται στο ίδιο σημείο, δηλαδή $x_1 = x_2$, άρα εξισώνουμε τις σχέσεις 1 και 2:

$$4t - 0,1t^2 = 6 + 0,4t^2 \rightarrow 0,5t^2 - 4t + 6 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 - 4 \cdot 12 = 16 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

Άρα οι λύσεις είναι $t_1 = 2 \text{ s}$ & $t_2 = 6 \text{ s}$

Επομένως, το λαγωνικό θα φτάσει τον λαγό την χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ σε απόσταση :

$$x_1 = 4 \cdot 2 - 0.1 \cdot 2^2 = 8 - 0.4 = 7.6 \text{ m}$$

Σχολιασμός: η δεύτερη ρίζα δεν έχει φυσική σημασία για την καταδίωξη καθώς μετά τα 2 δευτερόλεπτα ο σκύλος θα έχει πιάσει τον λαγό.

β) Με την νέα επιτάχυνση η θέση του λαγού θα είναι:

$$x'_2 = x_{02} + \frac{1}{2} a_3 t^2 = 6 + 0.9 t^2$$

Επομένως, εξισώνοντας πάλι τις δύο εξισώσεις κίνησης έχουμε:

$$x_1 = x_2$$

$$4t - 0.1t^2 = 6 + 0.9t^2$$

$$t^2 - 4t + 6 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 - 24 = -8 < 0$$

Αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική δεν υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης, που σημαίνει ότι ο σκύλος δεν θα φτάσει τον λαγό σε αυτή τη περίπτωση.

Η ελάχιστη απόσταση τους (Δx) θα βρεθεί κατά τη χρονική στιγμή που θα έχουν ίσες ταχύτητες

$$u_1' = u_2'$$

$$u_1 + a_1 t_1 = a_2 t_1$$

$$t_1 = 2 \text{ s}$$

$$x_1 = 4t - 0.1t^2 = 8 - 0.4 = 7.6 \text{ m}$$

$$x'_2 = 6 + 0.9 \cdot 2^2 = 9.6 \text{ m}$$

$$\Delta x = x'_2 - x_1 = 9.6 - 7.6 = 2 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Α5Α

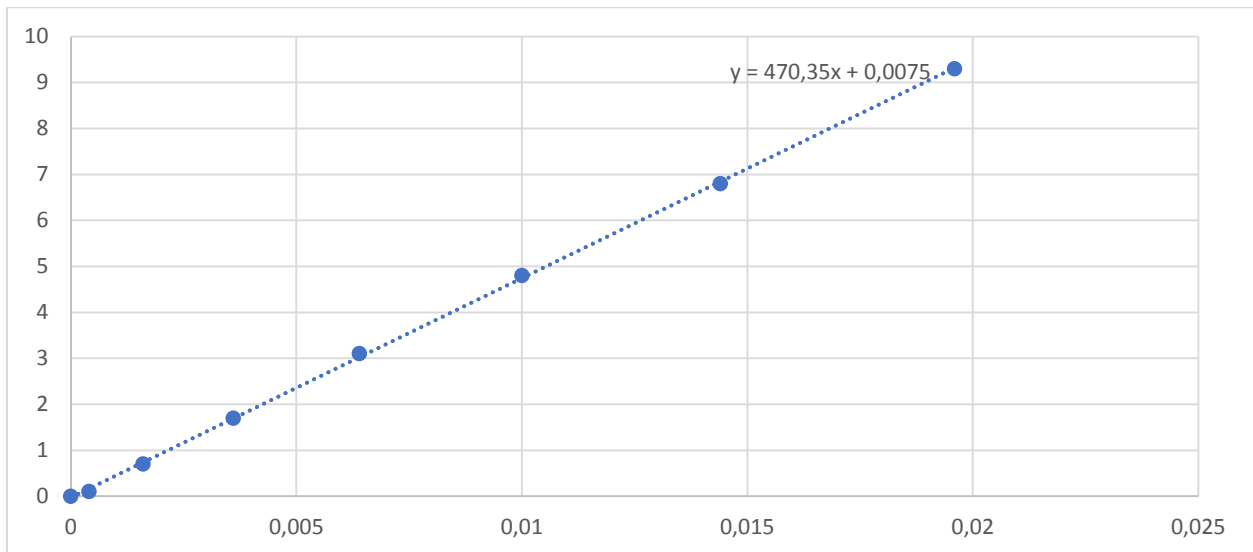
$$\text{A) } \Delta t = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$$

$$\text{B) } y = \frac{1}{2} g t^2$$

Η μετατόπιση και το t^2 είναι ανάλογα ποσά, οπότε η γραφική παράσταση $y-t^2$ είναι ευθεία με κλίση $g/2$.

Γ)

t(s)	t ²	y(cm)
0	0	0
0,02	0,0004	0,1
0,04	0,0016	0,7
0,06	0,0036	1,7
0,08	0,0064	3,1
0,1	0,01	4,8
0,12	0,0144	6,8
0,14	0,0196	9,3



$$\frac{g}{2} = 470 \Rightarrow g = 940 \text{ cm/s}^2$$

$$\Delta) g = 9,4 \text{ m/s}^2$$

$$\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\% = \frac{9,4 - 9,8}{9,8} 100\% = -4\%$$

ΘΕΜΑ Α5Β

- 1) Ο μαθητής βρίσκεται ακίνητος αρχικά 2m από τον αισθητήρα. Απομακρύνεται από αυτόν, φθάνει στα 6m, στέκεται για λίγο και πλησιάζει ξανά τον ανιχνευτή αλλά λίγο πιο αργά από ότι απομακρύνθηκε. Τελικά φθάνει πάλι στα 2 m από αυτόν. Πιο αναλυτικά:

αβ: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
βγ: ευθύγραμμη ομαλή
γδ: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη
δε: ακινησία
εζ: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αντίθετη κατεύθυνση
ζη: ευθύγραμμη ομαλή πλησιάζοντας τον αισθητήρα
ηθ: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη
θι: ακινησία

- 2) Η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν, το διανυόμενο διάστημα 1m και ο χρόνος 1s. Άρα από τη σχέση:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{Η τελική ταχύτητα } u = at = 2 \frac{m}{s}$$

- 3) Η ταχύτητα στο διάστημα (βγ) θα είναι $u = \frac{s_{\beta\gamma}}{\Delta t} = 2 \frac{m}{s}$ που προφανώς είναι ίση με την τελική ταχύτητα της προηγούμενης κίνησης αφού εάν ήταν διαφορετική θα είχαμε αλλαγή της ταχύτητας σε μηδενικό χρόνο, άρα άπειρη επιτάχυνση, άρα άτοπο.

- 4) Η κίνηση (γδ) όπως είπαμε είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με τελική ταχύτητα στο δ είναι μηδέν αφού στο διάστημα (δε) το σώμα παραμένει ακίνητο. Άρα από τη σχέση:

$$s = \frac{1}{2}a't^2 \rightarrow a' = \frac{2s}{t^2} = 2 \frac{m}{s^2}$$

Αν δεν αναφερθούμε στο μέτρο του διανύσματος της επιτάχυνσης αλλά στην αλγεβρική της τιμή που φανερώνει και τη φορά της, ότι δηλαδή είναι αντίρροπη της φοράς με κατεύθυνση από τον αισθητήρα προς τον μαθητή, θα γράψουμε ότι

$$a' = -2 \frac{m}{s^2}$$

η ταχύτητα στο διάστημα (ζη) είναι ίση με $u_{\zeta\eta} = \frac{s_{\zeta\eta}}{\Delta t} = 1 \frac{m}{s}$ και αν δεν αναφερόμαστε στο

μέτρο αλλά στην αλγεβρική τιμή της ταχύτητας θα γράφαμε $u_{\zeta\eta} = -1 \frac{m}{s}$

Η ταχύτητα αυτή αποτελεί και την τελική ταχύτητα της ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης (εζ). Η κίνηση αυτή είναι ομαλά επιταχυνόμενη αφού η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν.

Η ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (ηθ) έχει αρχική ταχύτητα 1m/s, τελική ταχύτητα μηδέν και διάρκεια 2s. Άρα από τη σχέση $u = \frac{2s}{t} \rightarrow s = \frac{ut}{2} = 1m$. Η επιτάχυνση θα έχει μέτρο

$$\alpha = \frac{2s}{t^2} = 0,5 \frac{m}{s^2} \text{ με αλγεβρική τιμή προφανώς θετική.}$$

5) Από τη θεμελιώδη σχέση $F=ma$ θα έχουμε:

$$F_{\alpha\beta} = ma = 160N \quad F_{\delta\epsilon} = 0 \quad F_{\eta\theta} = 40N$$

6) Η δύναμη που επιταχύνει ή επιβραδύνει το μαθητή είναι η στατική τριβή. Επομένως θα πρέπει να ισχύει $T \leq \mu N \rightarrow ma \leq \mu mg \rightarrow \mu \geq \frac{a}{g} \rightarrow \mu \geq 0,2$

Άρα με τα πατίνια δεν θα μπορούσε ο μαθητής να πραγματοποιήσει αυτή την κίνηση (Στο επίπεδο Λυκείου θεωρούμε ότι η μέγιστη στατική τριβή ισούται με την τριβή ολίσθησης)

7) Η γραφική παράσταση της ταχύτητας με το χρόνο και της επιτάχυνσης με το χρόνο.

