

Β' Λυκείου

18 Μαρτίου 2006

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1°

Στον κυκλικό επιταχυντή LHC του CERN ο οποίος πρόκειται να τεθεί σε λειτουργία το 2007, πρωτόνια, σε δύο δέσμες, θα επιταχύνονται με τη βοήθεια κοιλοτήτων ραδιοσυχνότητας σχεδόν στην ταχύτητα του φωτός c , αποκτώντας μια ενέργεια $E=7\text{TeV}$ δηλαδή $E=1,12 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ το καθένα. Στη συνέχεια τα πρωτόνια θα συγκρούονται έχοντας τόσο μεγάλες ενέργειες ώστε να δημιουργούνται πιθανώς νέα στοιχειώδη σωματίδια. Ο δακτύλιος μέσα στον οποίο θα κινούνται τα πρωτόνια έχει ακτίνα $r=4243 \text{ m}$ και βρίσκεται σε βάθος 100 m κάτω από την επιφάνεια του εδάφους. Η δύναμη Lorentz που θα οφείλεται σε 1232 υπεραγωγία μαγνητικά δίπολα (ηλεκτρομαγνήτες) τοποθετημένα πάνω στον δακτύλιο κατά μήκος της δέσμης των πρωτονίων, θα δρα ως κεντρομόλος δύναμη για την κυκλική κίνηση των πρωτονίων. (Υπεραγωγός είναι το υλικό εκείνο στο οποίο υπάρχει πλήρης απουσία ηλεκτρικής αντίστασης και αυτό στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητών του LHC επιτυγχάνεται με υγρό Ήλιο και σε θερμοκρασία $1,9 \text{ K}$)

α) Υπολογίστε / εκτιμήστε την κεντρομόλο δύναμη σε κάθε πρωτόνιο, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ενέργεια των πρωτονίων δίνεται από τη σχέση ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας του Einstein $E=mc^2$ και ότι όπως αποδεικνύεται ο τύπος της κεντρομόλου και στις υψηλές ταχύτητες έχει την ίδια μορφή με εκείνη που έχει στην κλασική μηχανική με την προϋπόθεση ότι το m είναι αυτό που υπεισέρχεται στην εξίσωση $E=mc^2$.

β) Θα υπάρχουν δύο δέσμες πρωτονίων με 2835 ομάδες σε κάθε δέσμη και $1,05 \cdot 10^{11}$ πρωτόνια σε κάθε ομάδα. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος της μιας δέσμης των πρωτονίων. Δίνεται το φορτίο κάθε πρωτονίου $e=1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ και η ταχύτητα του φωτός $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

γ) Από την τιμή της κεντρομόλου δύναμης σε κάθε πρωτόνιο, υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο B .

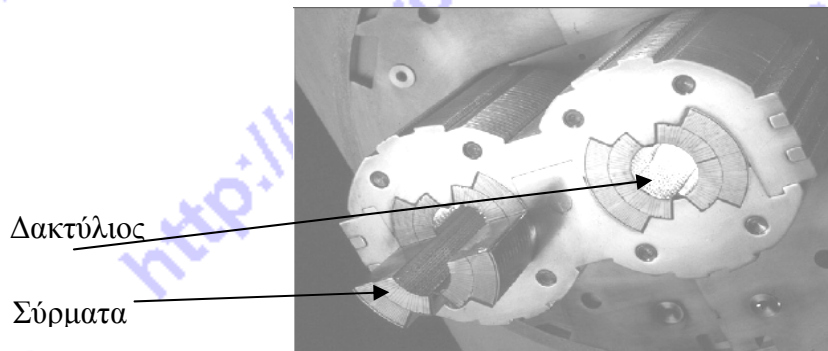
δ) Ένα πλήθος αναγκαίων διατάξεων, όπως αντλίες κενού, RF κοιλοτήτες, μετρητικές διατάξεις, όργανα υψηλής τάσης, τετραπολικοί μαγνήτες (οι οποίοι αποτρέπουν την απόκλιση της δέσμης) και βεβαίως οι τεράστιοι ανιχνευτές στοιχειωδών σωματιδίων όπως οι ATLAS και CMS παρεμβάλλονται στον δακτύλιο και τα 1232 μαγνητικά δίπολα δεν καλύπτουν ολόκληρη την περίμετρο του δακτυλίου αλλά μόνο ένα κλάσμα της. Για το λόγο αυτό το μαγνητικό πεδίο που απαιτείται είναι κατά $51,4\%$ αυξημένο σε σχέση με αυτό που βρήκατε στο ερώτημα γ. Να υπολογίσετε αυτό το απαιτούμενο μαγνητικό πεδίο B . Το κάθε δίπολο έχει μήκος $14,3 \text{ m}$. Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος που καλύπτουν τα δίπολα και την ακτίνα του κύκλου που έχει περίμετρο το μήκος αυτό.

ε) Ο ανιχνευτής CMS περιέχει το μεγαλύτερο σωληνοειδές που έχει ποτέ κατασκευασθεί, με συνολικό μήκος $12,5 \text{ m}$ και 2180 σπείρες στις οποίες κυκλοφορεί ηλεκτρικό ρεύμα $I=19500 \text{ A}$. Αν $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m / A}$, να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο B στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Δίνεται: $K_\mu=\mu_0/4\pi$ και ότι σπείρες θα είναι υπεραγωγοί σε θερμοκρασία $4,2 \text{ K}$.

στ) Αν ένα ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα $u_0 = 6 \cdot 10^4$ m/s εισέλθει στο εσωτερικό του σωληνοειδούς του ερωτήματος ϵ από τη μια του άκρη, έτσι ώστε η ταχύτητά του να σχηματίζει με τον άξονα του σωληνοειδούς γωνία $\varphi = 60^\circ$ και εξέλθει από την άλλη του άκρη, να βρείτε το χρόνο κίνησης και το μήκος της τροχιάς που διαγράφει το ηλεκτρόνιο μέσα στο σωληνοειδές.

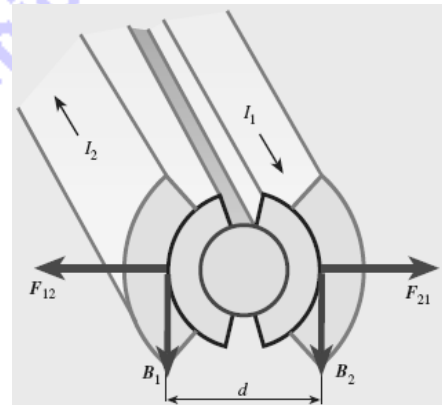
ζ) Στον LEP ο οποίος ήταν ο προηγούμενος επιταχυντής του CERN υπήρχαν 500 ηλεκτρομαγνήτες με αντίσταση $R = 0,08 \Omega$ ο καθένας, στους οποίους κυκλοφορούσε ηλεκτρικό ρεύμα 500 A για την παραγωγή μαγνητικού πεδίου 0,3 T. Να υπολογίσετε την απώλεια ισχύος στις αντιστάσεις των ηλεκτρομαγνητών και προσπαθήστε να δικαιολογήσετε τη χρήση των υπεραγωγίμων ηλεκτρομαγνητών στον LHC.

η) Το κάθε μαγνητικό δίπλο περιέχει υπεραγωγίμα σύρματα τα οποία απέχουν 45 mm από το κέντρο του δακτυλίου (σχήμα 1). Στα σύρματα αυτά κυκλοφορεί ηλεκτρικό ρεύμα 12000 A. Σε αντιδιαμετρικά σύρματα τα ρεύματα είναι αντίθετα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Να υπολογίσετε τον αριθμό



Σχήμα 1

των συρμάτων στηριζόμενοι στην τιμή του απαιτούμενου μαγνητικού πεδίου B την οποία υπολογίσατε στο ερώτημα δ. Τα σύρματα είναι ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί.



Σχήμα 2

θ) Να βρείτε τη δύναμη ανά μονάδα μήκους σε κάθε σύρμα από το μαγνητικό πεδίο του αντιδιαμετρικού του σύρματος.

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

$$\alpha) F_{\text{κεντρ}} = \frac{mu^2}{r} = \frac{mc^2}{r} = \frac{E}{r} = \frac{1,12 \cdot 10^{-6} \text{ J}}{4243 \text{ m}} = 2,64 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

$$\beta) I = \frac{Q}{t} = \frac{Ne}{\frac{2\pi r}{c}} = \frac{1,05 \cdot 10^{11} \cdot 2835 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2\pi \cdot 4243 \text{ m}} = 0,53 \text{ A}$$

$$\gamma) B = \frac{F_{\text{κεντρ}}}{eu} \text{ αλλά } u \approx c \text{ οπότε } B = \frac{F_{\text{κεντρ}}}{ec} = \frac{2,64 \cdot 10^{-10}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8} = 5,51 \text{ T}$$

$$\delta) \frac{B_{\text{TEA}} - B}{B} = 0,54 \Rightarrow B_{\text{TEA}} = 8,33 \text{ T}$$

$$r_b = \frac{1232 \cdot 14,3}{2\pi} = \frac{17618}{2\pi} = 2804 \text{ m}$$

$$\epsilon) B_{\text{CMS}} = \frac{\mu_0 NI}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2180 \cdot 19500}{12,5} = 4,3 \text{ T}$$

$$\sigma\tau) t = \frac{L}{u_0 \sigma v \theta} = \frac{2 \cdot 12,5}{6 \cdot 10^4} = 416,6 \text{ } \mu\text{s}$$

Ελικοειδής τροχιά μήκους $s = u_0 t = 6 \cdot 10^4 \cdot 416,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2499,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 24,996 \text{ m}$.

$$\zeta) P = 500 \text{ } \dot{I} R = 500 \cdot 0,08 \cdot 500^2 = 10^7 \text{ W}$$

$$\eta) B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi d} \approx 0,06 \text{ T} \text{ } \text{οπότε ο αριθμός των συρμάτων θα είναι } N = \frac{B_{\text{TEA}}}{B_1} = 150$$

$$\theta) \frac{F}{l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} = 320 \text{ Nm}^{-1}.$$

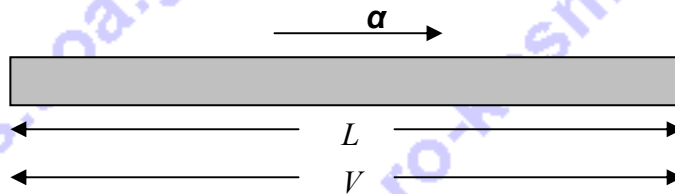
Θέμα 2^ο

A. Ένα σπίτι κοντά σε μια λίμνη καλύπτει τις ενεργειακές του ανάγκες με μια θερμική μηχανή. Το χειμώνα, νερό κάτω από την παγωμένη επιφάνεια της λίμνης αντλείται προς την θερμική μηχανή. Θερμότητα μεταβιβάζεται από το νερό στο εργαζόμενο μέσο της μηχανής, μέχρις ότου το νερό φθάσει στο σημείο πήξεώς του, οπότε και αποβάλλεται. Ο εξωτερικός αέρας χρησιμοποιείται ως δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας. Υποθέστε ότι η θερμοκρασία του αέρα είναι -15°C και η θερμοκρασία του νερού από τη λίμνη είναι 2°C . Υπολογίστε το ρυθμό (Λίτρα σε κάθε δευτερόλεπτο) με τον οποίο το νερό πρέπει να αντλείται προς τη μηχανή. Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι ίσος με το ένα-πέμπτο της μέγιστης θεωρητικά προβλεπόμενης, και το σπίτι χρειάζεται 10 kW. Η πυκνότητα του νερού είναι 1 g/cm^3 και η ειδική του θερμότητα $4,18 \text{ J/g K}$.

B. Με την εργασία του, ο J.J. Thomson το 1897 για τη σωματιδιακή φύση των καθοδικών ακτίνων έδειξε ότι τόσο στη φωτοηλεκτρική όσο και στη θερμική εκπομπή, σωματίδια με τον ίδιο λόγο φορτίου προς μάζα (ηλεκτρόνια), εμφανίζονται έξω από τα μέταλλα. Κατέληξε έτσι στην υπόθεση ότι στα μέταλλα υπάρχουν ηλεκτρόνια. Μια δεύτερη υπόθεση που θα έπρεπε να ελεγχθεί πειραματικά και να έχει μεγάλη δυνατότητα ερμηνείας και πρόβλεψης ώστε να αποτελέσει μια θεωρία, ήταν η υπόθεση ότι στα μέταλλα υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια.

1. Πώς συμπεραίνεται η ελευθερία των φορέων του φορτίου σε μεταλλικό αγωγό από το νόμο του Ohm;

2. Η πειραματική επικύρωση της δεύτερης υπόθεσης ήρθε με το πείραμα Tolman και Stewart (1916, 1917). Η μέθοδος που ακολούθησαν ήταν να προσδίδουν μεγάλη επιτάχυνση σε ένα μέταλλο και να μετρούν τη διαφορά δυναμικού που εκδηλώνεται μεταξύ των άκρων του μετάλλου λόγω της αδρανειακής μάζας των ελεύθερων φορέων φορτίου οι οποίοι υπάρχουν μέσα του. Στο παρακάτω σχήμα ο μεταλλικός αγωγός με μήκος L επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση a . Να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του σε σχέση με τα L , a , και το ειδικό φορτίο (πηλίκο ηλ. Φορτίου προς τη μάζα) e/m του ηλεκτρονίου.

**Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:**

A. $\alpha = \frac{1}{5} a_c = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)$ $T_h = 274\text{K}$, $T_c = 258\text{K}$ επίσης: $\frac{Q_2}{t} = \frac{m}{t} \cdot c \cdot \Delta T$ με $\Delta T = 2 \text{ deg}$

$$a = \frac{P_{\omega\phi}}{P_{\delta\alpha\pi}} \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{275 - 258}{274} = \frac{10^4}{\frac{m}{t} \cdot 4,18 \cdot 2} \Rightarrow \frac{m}{t} = 102,4 \cdot 10^3 \text{ g/s} \text{ δηλαδή } 102,4 \text{ L/s}$$

B. 1) Ανυπαρξία κατωφλίου τάσης. Για οσοδήποτε μικρή τάση υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα. (γραφική παράσταση της χαρακτηριστικής ενός αντιστάτη).

2) Δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του μεταλλικού αγωγού λόγω της μετακίνησης ελευθέρων ηλεκτρονίων στο αριστερό του άκρο η οποία οφείλεται στην επιταχυνόμενη κίνηση του αγωγού και στην αδράνεια των ηλεκτρονίων. Μόλις αποκαθίσταται το πεδίο αυτό σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο θα ασκείται δύναμη

$$F = ma \text{ δηλαδή } Ee = ma \text{ δηλαδή } \frac{V}{L} e = ma \text{ οπότε } V = \frac{mLa}{e}$$

Θέμα 3^ο

A. Ένα ιδανικό αέριο βρίσκεται σε δοχείο με έμβολο. Στο τοίχωμα του δοχείου που είναι απέναντι από το έμβολο υπάρχει μια μικρή οπή από την οποία διαρρέει το αέριο από το δοχείο με ρυθμό R . Ποιος θα ήταν ο ρυθμός διαρροής του αερίου στην περίπτωση που η θερμοκρασία στο εσωτερικό του δοχείου ήταν τετραπλάσια και η πίεση οκταπλάσια; Να θεωρήσετε ότι η μέση ταχύτητα των μορίων σε κάποια κατεύθυνση είναι ανάλογη με την ενεργό ταχύτητα των μορίων.

B. Ένα κλειστό μεταλλικό δακτυλίδι ακτίνας $a=1 \text{ m}$ και αντίστασης $R=0,4 \ \Omega$ είναι τοποθετημένο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B_1=400 \text{ mT}$ με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αρχίζουμε να μεταβάλλουμε με σταθερό ρυθμό την ένταση B_1 του μαγνητικού πεδίου μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=5\pi \text{ s}$.

Ποια πρέπει να είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου τη χρονική στιγμή t_2 (B_2) ώστε η θερμική ισχύς στο δακτυλίδι να είναι $P=16 \text{ mW}$.

Πόσο είναι το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλιδιού τη χρονική στιγμή $t_1=5\pi/2 \text{ s}$ λόγω του επαγωγικού ρεύματος; Δίνεται: $K_\mu=10^{-7} \text{ N/A}^2$.

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

A. Ο ρυθμός διαρροής θα εκφραστεί σε μόρια ανά δευτερόλεπτο δηλαδή $R = \frac{N}{t}$

Όμως τα μόρια που διαφεύγουν σε χρόνο t θα είναι αυτά που θα έχουν ταχύτητα κάθετη στο τοίχωμα του δοχείου που φέρει τη σχισμή και ο αριθμός τους θα δίνεται από τη

σχέση $N = \frac{1}{2} n s \bar{u}_x t$ όπου s το εμβαδόν της οπής, n ο αριθμός των μορίων ανά μονάδα όγκου και \bar{u}_x η μέση ταχύτητα των μορίων στον άξονα x ο οποίος είναι κάθετος στο τοίχωμα που φέρει τη σχισμή. Επειδή η \bar{u}_x είναι ανάλογη της ενεργού ταχύτητας $u_r = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ θα είναι ανάλογη με την \sqrt{T} . Επίσης από την κινητική θεωρία $n = \frac{P}{KT}$. Έτσι ο ρυθμός διαρροής θα είναι: $R = \frac{N}{t} = \text{σταθ} \frac{P}{T} \sqrt{T} = \text{σταθ} \frac{P}{\sqrt{T}}$. Αφού λοιπόν η πίεση οκταπλασιάζεται και η θερμοκρασία τετραπλασιάζεται ο ρυθμός διαρροής θα τετραπλασιάζεται.

B. $P = I^2 R$ από την οποία $I = \pm 0,2 \text{ A}$ αλλά $|I| = \frac{|E_{\text{ΕΠ}}|}{R} \rightarrow |E_{\text{ΕΠ}}| = 8 \cdot 10^{-2} \text{ V}$

$$|E_{\text{ΕΠ}}| = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \rightarrow |\Delta\Phi| = 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5\pi \text{ wb} \quad \text{ή} \quad |\Delta\Phi| = 4\pi \cdot 10^{-1} \text{ wb}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \pi a^2 B_2 - \pi a^2 B_1 = \pi a^2 \Delta B \quad \text{οπότε:} \quad |\Delta B| = \frac{|\Delta\Phi|}{\pi a^2} = 0,4 \text{ T} = 400 \text{ mT} \text{ Συνεπώς:}$$

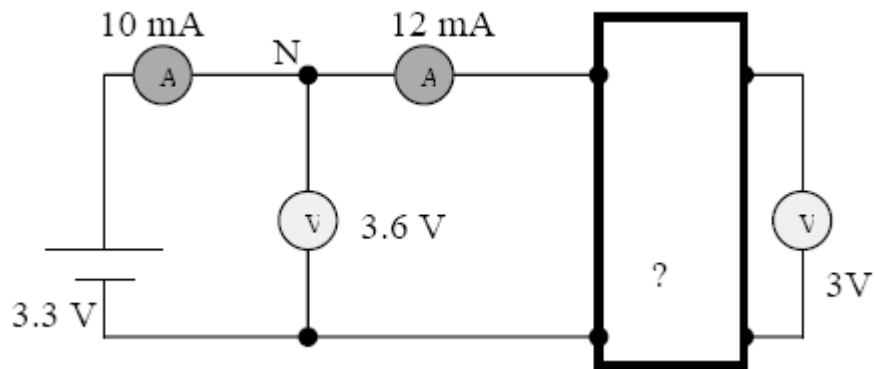
$$\text{Αν } \Delta B > 0 : B_2 = B_1 + \Delta B = (400 + 400) \text{ mT} \quad \text{ή} \quad B_2 = 800 \text{ mT}$$

$$\text{Αν } \Delta B < 0 : B_2 = B_1 - \Delta B = (400 - 400) \text{ mT} \quad \text{ή} \quad B_2 = 0$$

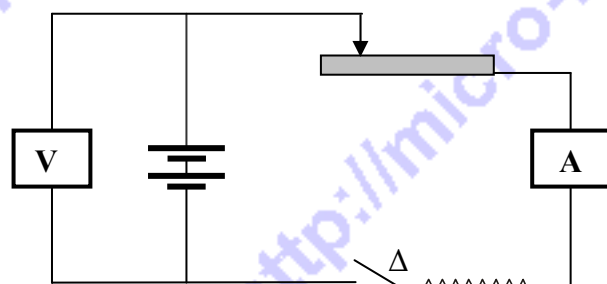
Στο κέντρο του δακτυλιδιού λόγω του επαγωγικού ρεύματος: $B_k = K_\mu \frac{2\pi I}{a} = 4\pi \cdot 10^{-8} \text{ T}$

Πειραματικό Μέρος

A. Ένα «μαύρο κουτί» με άγνωστο ηλεκτρικό κύκλωμα στο εσωτερικό του έχει τέσσερις ακροδέκτες. Ένας μαθητής διαθέτοντας μια ιδανική μπαταρία, δύο ίδια αλλά όχι ιδανικά βολτόμετρα και δύο ίδια αλλά όχι ιδανικά αμπερόμετρα για να ανακαλύψει το περιεχόμενο του κουτιού έκανε το παρακάτω κύκλωμα στο οποίο φαίνονται και οι μετρήσεις του. Καθορίστε το πιθανό κύκλωμα στο μαύρο κουτί και βρείτε τις παραμέτρους αριθμητικά. Προσπαθήστε να επινοήσετε το απλούστερο δυνατό κύκλωμα.



B. Για τον προσδιορισμό της ηλεκτρεγερτικής δύναμης E και της εσωτερικής αντίστασης r μιας ηλεκτρικής πηγής συνεχούς, πραγματοποιήσαμε το κύκλωμα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στη συνέχεια κλείσαμε τον διακόπτη Δ και με τη βοήθεια των οργάνων μετρήσαμε την πολική τάση $V_{\text{Π}}$ της πηγής και την έ-



νταση I του ρεύματος που την διαρρέει, για κάποια θέση του δρομέα δ της ρυθμιστικής αντίστασης

Τέλος επαναλάβαμε την προηγούμενη διαδικασία για διάφορες θέσεις του δρομέα δ οπότε προέκυψε ο παρακάτω πίνακας μετρήσεων:

V_{π} (V)	I (A)
7.39	0.13
6.65	0.33
5.68	0.57
3.12	1.21
1.02	1.72

1. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα $V_{\pi}=f(I)$ και να δικαιολογήσετε τη μορφή του

2. Να προσδιορίσετε τις τιμές των μεγεθών E και r

Γ. Σε ποιόν από τους παρακάτω πίνακες οι τιμές δείχνουν εμφανώς μια σχέση αντιστρόφου τετραγώνου ανάμεσα στις δυο μετρούμενες ποσότητες;

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ
Α**

1024	1
512	2
256	3
128	4
64	5

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ
Β**

1	2
16	4
36	6
64	8
100	10

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ
Γ**

360	1
90	2
40	3
22.5	4
14.4	5

α. Στον πίνακα Α

β. Στον πίνακα Β

γ. Στον πίνακα Γ

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

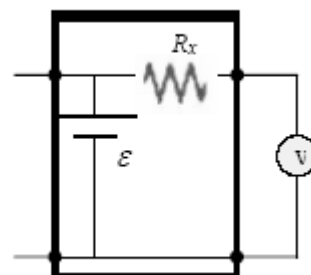
Α. Αφού το ένα βολτόμετρο δείχνει τάση μεγαλύτερη από την ΗΕΔ της πηγής το κουτί θα περιέχει και αυτό τουλάχιστον μια πηγή. Ο απλούστερος συνδυασμός για το κουτί είναι μια πηγή και ένας αντιστάτης. Με το δείκτη 1 θα συμβολίζουμε τις τιμές των τάσεων και των αντιστάσεων του αριστερού αμπερομέτρου και με το δείκτη 2 του δεξιού. Έχουμε:

$$V_1 = 3,6 - 3,3 = 0,3 \text{ V}$$

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = R_2 = 30 \Omega \quad V_2 = I_2 R_2 = 0,36 \text{ V} \quad \text{Έτσι η τάση στα αριστερά άκρα του κουτιού θα}$$

είναι : $3,6 + 0,36 = 3,96 \text{ V}$. Συνεπώς ο αντιστάτης στο κουτί δεν μπορεί να είναι σε σειρά με την πηγή. Έτσι η ΗΕΔ της πηγής στο κουτί θα είναι: $E = 3,96 \text{ V}$ και ο αντιστάτης θα είναι συνδεδεμένος όπως φαίνεται στο σχήμα.

Από τον Α΄ κανόνα του Κίρχωφ το ρεύμα στο αριστερό βολτόμετρο θα είναι $I_{B1} = 2 \text{ mA}$



Έτσι η αντίστασή του θα είναι $R_{B1} = \frac{3,6}{0,002} = 1,8 \text{ k}\Omega$. Επειδή και το δεξί βολτόμετρο έχει την

ίδια εσωτερική αντίσταση το ρεύμα σ' αυτό θα είναι: $I_{B2} = \frac{3}{1800} = 1,7 \text{ mA}$

Έτσι η $R_x = \frac{3,96 - 3}{1,7 \cdot 10^{-3}} = 565 \text{ }\Omega$

Β. $E=8.1\text{V}$, $r=4.3\Omega$

Γ. Σωστό το γ)

