ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

Κυριακή 5 Απριλίου 2020

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. δ
Α2. β
Α3. γ
Α4. β
Α5. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση η iii.
Αν δεν υπήρχε η δύναμη Laplace $\overrightarrow{F_L}$ και στον αγωγό ασκούνταν μόνο το βάρος του $\overrightarrow{W}$ και η δύναμη του ελατηρίου $\overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}}$, θα ισορροπούσε σε θέση που το ελατήριο θα ήταν επιμηκυμένο κατά απόσταση d:

$$\Sigma F=0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda} - W=0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda} = W \Leftrightarrow K\cdot d = m\cdot g \Leftrightarrow 100\cdot d = 10 \Leftrightarrow d = 0{,}1\ m = 10\ cm$$

Επομένως, αφού αρχικά η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι d_1=5 cm, η δύναμη Laplace έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα πάνω και ισχύει:

$$\Sigma F=0 \Leftrightarrow F_L + F_{\varepsilon\lambda} - W=0 \Leftrightarrow F_L = -K\cdot d_1 + 10 \Leftrightarrow F_L = -5 + 10 \Leftrightarrow F_L = 5\ N$$

Με την αντιστροφή της κατεύθυνσης της έντασης του μαγνητικού πεδίου, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δαχτύλων του δεξιού χεριού, αντιστρέφεται και η κατεύθυνση της δύναμης Laplace, χωρίς να αλλάξει το μέτρο της. Έτσι στη νέα θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F=0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda} - F_L - W=0 \Leftrightarrow K\cdot d_2 - 5 - 10 = 0 \Leftrightarrow 100\cdot d_2 = 15 \Leftrightarrow d_2 = 0{,}15\ m = 15\ cm.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η iii.
Στη θέση ισορροπίας το σώμα (Σ_1) έχει επιμήκυνση d και του ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος του $\overrightarrow{W_1}$ προς τα κάτω και η δύναμη $\vec{F}$ από το ελατήριο προς τα πάνω:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - W_1 = 0 \Leftrightarrow F = W_1 \Leftrightarrow 20\cdot d = 0{,}2\cdot 10 \Leftrightarrow d = 0{,}1\ m$$

Για τις μάζες ισχύει ότι $m_1=3\cdot m_2$. Εφαρμόζουμε τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης που το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο, για να βρούμε την ταχύτητα υ_1' του σώματος (Σ_1) μετά την κρούση. Προσοχή θέλει το γεγονός ότι στους τύπους αλλάζουμε τους δείκτες 1 και 2, διότι πριν την κρούση κινείται το (Σ_2):

$$\upsilon_1' = \frac{2\cdot m_2}{m_1+m_2}\cdot \upsilon_2 = \frac{2\cdot m_2}{4\cdot m_2}\cdot 4 = 2\ m/s$$

Η ταχύτητα υ_1' είναι η μέγιστη ταχύτητα υ_{max} της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το (Σ_1), διότι είναι η ταχύτητα που έχει στη θέση ισορροπίας. Η γωνιακή ταχύτητα ω της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}2}} = \sqrt{100} = 10\ rad/s$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται:

$$A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Leftrightarrow A = \frac{2}{10} \Leftrightarrow A = 0{,}2\ m$$

Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω. Άρα, αφού τη χρονική στιγμή t_0=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση είναι μηδέν (φ_0=0).

Το σώμα (Σ_1) θα βρεθεί στη θέση φυσικού μήκους του λάστιχου για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_1 η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση απομάκρυνσης:

$$x = A\cdot ημ(ω\cdot t) \Leftrightarrow 0,1 = 0,2\cdot ημ(10\cdot t) \Leftrightarrow ημ(10\cdot t) = ημ(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 10\cdot t_1 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{60} \Leftrightarrow$$

$$t_1 = \frac{3}{60} = 0,05 \text{ s}$$

Η ταχύτητα του σώματος (Σ_1) τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$υ_1 = υ_{max}\cdot συν(ω\cdot t) \Leftrightarrow υ_1 = 2\cdot συν(10\cdot\frac{\pi}{60}) \Leftrightarrow υ_1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow υ_1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow υ_1 = 1,7 \text{ m/s}$$

Μετά τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα (Σ_1) κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω, αφού πλέον δεν ασκείται η δύναμη από το λάστιχο. Το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται ώστε να ακινητοποιηθεί το σώμα (Σ_1) είναι ίσο με:

$$υ = υ_1 - g\cdot Δt \Leftrightarrow 0 = 1,7 - 10\cdot Δt \Leftrightarrow 10\cdot Δt = 1,7 \Leftrightarrow Δt = 0,17 \text{ s}$$

Άρα, η χρονική στιγμή, μετά την κρούση, που το σώμα (Σ1) θα ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά ισούται με

$$t = t_1 + Δt \Leftrightarrow t = 0,05 + 0,17 \Leftrightarrow t = 0,22 \text{ s}$$

Β3. Σωστή απάντηση η i.

Για να βρίσκεται η επιφάνεια του νερού στο δοχείο στο ίδιο ύψος, πρέπει η παροχή του νερού που εισέρχεται να ισούται με την παροχή του νερού που εξέρχεται από το δοχείο. Αν υ είναι η ταχύτητα του νερού στο άνοιγμα της ομπρέλας και $υ_1$ είναι η ταχύτητα εξόδου του νερού από την οπή, θα ισχύει: $Π = Π_1 \Leftrightarrow A\cdot υ = A\cdot υ_1 \Leftrightarrow υ = υ_1$

Εφαρμόζουμε εξίσωση συνέχειας για την κίνηση του νερού στο δοχείο:

$$A_Δ\cdot υ_Δ = A\cdot υ_1 \Leftrightarrow υ_Δ \cong 0$$

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli για μία ρευματική γραμμή του νερού από την επιφάνεια του νερού έως την οπή, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την οπή:

$$P_{ατμ} + \frac{1}{2}\cdot ρ\cdot υ_Δ^2 + ρ\cdot g\cdot h = P_{ατμ} + \frac{1}{2}\cdot ρ\cdot υ_1^2 + ρ\cdot g\cdot 0 \Leftrightarrow υ_1 = \sqrt{2\cdot g\cdot h} \quad \text{(Θεώρημα Torricelli)}$$

Άρα

$$υ_1 = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0,8} = \sqrt{16} = 4 \text{ m/s}$$

Επομένως ισχύει: υ=4 m/s.

Η κίνηση του νερού από τη βρύση έως την ομπρέλα είναι κατακόρυφη βολή προς τα κάτω:

$$\left.\begin{aligned} υ &= υ_0 + g\cdot t \\ x &= υ_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{υ^2 - υ_0^2}{2\cdot g} \Leftrightarrow x = \frac{4^2 - 2^2}{20} \Leftrightarrow x = 0,6 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την εξίσωση συνέχειας στον σωλήνα (Σ_2) βρίσκουμε:

$$\frac{A}{2}\cdot υ = A\cdot υ_2 \Leftrightarrow υ_2 = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}$$

Γ2. Από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση Bernoulli στο ροόμετρο Venturi, με δεδομένο ότι ο λόγος των εμβαδών του ροόμετρου είναι ίσος με $\frac{3}{2}$, προκύπτει:

$$υ_1 = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot h}{(\frac{3}{2})^2 - 1}} = \sqrt{\frac{20}{\frac{5}{4}}} = \sqrt{16} = 4 \text{ m/s}$$

Γ3. Η παροχή $Π_1$ του ρευστού (P_1) είναι διπλάσια από την παροχή $Π_2$ του ρευστού (P_2), διότι $Π_1 = A_1\cdot υ_1 = A\cdot 4$ (SI) και $Π_2 = A_2\cdot υ_2 = A\cdot 2$ (SI)

Άρα στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt ο όγκος V_1 του ρευστού (P_1) μέσα στο δοχείο (Δ) είναι διπλάσιος από τον όγκο V_2 του ρευστού (P_2), διότι $V_1 = Π_1\cdot Δt = 2\cdot Π_2\cdot Δt = 2\cdot V_2$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την πυκνότητα ρ του ρευστού (P) που προκύπτει από την ανάμειξη των δύο ρευστών (P_1) και (P_2):

$$ρ = \frac{m}{V} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{ρ_1\cdot V_1 + ρ_2\cdot V_2}{2\cdot V_2 + V_2} = \frac{2\cdot V_2 + 0,7\cdot V_2}{3\cdot V_2} = 0,9 \text{ g/cm}^3 = 900 \text{ kg/m}^3$$

Άρα η πίεση στον πυθμένα του δοχείου (Δ) ισούται με:

$$P = P_{ατμ} + \rho \cdot g \cdot H = 10^5 + 900 \cdot 10 \cdot 2 = 1{,}18 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Γ4. Εφόσον η στάθμη του ρευστού στο δοχείο (Δ) είναι σταθερά στο ίδιο ύψος, το άθροισμα των παροχών των ρευστών που εισέρχονται στο δοχείο (Δ) ισούται με την παροχή του ρευστού που εξέρχεται από το δοχείο. Σύμφωνα με το θεώρημα Torricelli (αποδεικνύεται από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση Bernoulli) το ρευστό που εξέρχεται από το δοχείο, έχει μέτρο ταχύτητας

$$\upsilon_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - x)} = \sqrt{20 \cdot (2 - x)} \quad \text{(SI)}$$

Επομένως ισχύει:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_3 \Leftrightarrow 4 \cdot A + 2 \cdot A = A \cdot \sqrt{20 \cdot (2 - x)} \Leftrightarrow 6^2 = 40 - 20 \cdot x \Leftrightarrow 20 \cdot x = 4 \Leftrightarrow x = 0{,}2 \text{ m}$$

Το ρευστό εξέρχεται από το άνοιγμα του δοχείου με ταχύτητα μέτρου υ_3:

$$\upsilon_3 = \sqrt{20 \cdot (2 - 0{,}2)} = 6 \text{ m/s}$$

Το ρευστό που εξέρχεται από το άνοιγμα του δοχείου εκτελεί οριζόντια βολή:

$$x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Leftrightarrow 0{,}2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \Leftrightarrow t^2 = 0{,}04 \Leftrightarrow t = 0{,}2 \text{ s}$$

Το βεληνεκές s ισούται με:

$$s = \upsilon_3 \cdot t = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $m_{ολ}$ η μάζα που θα είχε η σφαίρα, αν ήταν όλη συμπαγής. Έστω $m_Λ$ η μάζα του κομματιού που λείπει και $V_Λ$ ο όγκος του. Η πυκνότητα ρ είναι σταθερή:

$$\rho = \frac{m_Λ}{V_Λ} = \frac{m_Λ}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R'^3} \quad \text{και} \quad \rho = \frac{m_{ολ}}{V_{ολ}} = \frac{m_{ολ}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

Επειδή $R = 2 \cdot R'$, από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{m_{ολ}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{m_Λ}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R'^3} \Leftrightarrow m_{ολ} = 8 \cdot m_Λ \Leftrightarrow m_Λ = \frac{m_{ολ}}{8}$$

Επομένως η μάζα της κοίλης σφαίρας είναι:

$$m = m_{ολ} - m_Λ \Leftrightarrow 70 = m_{ολ} - \frac{m_{ολ}}{8} \Leftrightarrow 70 = \frac{7 \cdot m_{ολ}}{8} \Leftrightarrow m_{ολ} = 80\ kg \quad \text{και} \quad m_Λ = 10\ kg$$

Η ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρας προκύπτει αν από τη ροπή αδράνειας της συμπαγούς σφαίρας αφαιρέσουμε τη ροπή αδράνειας του κομματιού που λείπει:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m_{ολ} \cdot R^2 - \frac{2}{5} \cdot m_Λ \cdot R'^2 = \frac{2}{5} \cdot 80 \cdot 4 \cdot 10^{-2} - \frac{2}{5} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 1{,}28 - 0{,}04 = 1{,}24\ kg \cdot m^2$$

Δ2. Για τις τάσεις των νημάτων, αφού τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά, ισχύει $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$. Η σφαίρα (Σ) ισορροπεί, άρα: $\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Leftrightarrow T_2 \cdot R - T_S \cdot R = 0 \Leftrightarrow T_2 = T_S$ και

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow W \cdot ημφ - T_2 - T_S = 0 \Leftrightarrow$

$70 \cdot 10 \cdot 0{,}6 = 2 \cdot T_2 \Leftrightarrow T_2 = T_2' = 210$ N

Η τροχαλία ισορροπεί:

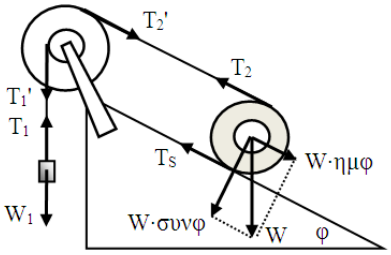
$\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow T_2' \cdot R_1 - T_1' \cdot R_2 = 0 \Leftrightarrow$

$210 \cdot 0{,}2 = T_1 \cdot 0{,}1 \Leftrightarrow T_1 = 420$ N

Το σώμα (Σ_1) ισορροπεί:

$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T_1 - W_1 = 0 \Leftrightarrow m_1 \cdot g = 420 \Leftrightarrow$

$m_1 = 42$ kg



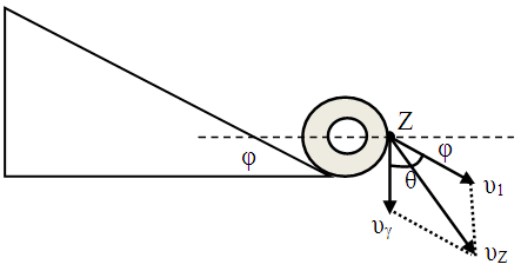
Δ3. Μόλις κοπεί το νήμα, αλλάζουν τα μέτρα T_1 και T_1' των τάσεων του νήματος (συνεχίζει να ισχύει ότι $T_1'=T_1$), ενώ μηδενίζονται τα μέτρα T_2 και T_2'. Η τροχαλία εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$\Sigma\tau = I_{cm,T}\cdot\alpha_{\gamma,T} \Leftrightarrow T_1'\cdot R_2 = \frac{1}{2}\cdot M_T\cdot R_1^2\cdot\frac{a}{R_2} \Leftrightarrow T_1\cdot 0{,}1 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0{,}04\cdot\frac{a}{0{,}1} \Leftrightarrow T_1 = 40\cdot\alpha$

Το σώμα (Σ_1) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω:

$\Sigma F = m_1\cdot\alpha \Leftrightarrow W_1 - T_1 = m_1\cdot\alpha \Leftrightarrow 420 - 40\cdot\alpha = 42\cdot\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{420}{82} \Leftrightarrow \alpha = \frac{210}{41}$ m/s^2.

Δ4. Η ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon_Z}$ είναι η συνισταμένη της ταχύτητας του κέντρου μάζας $\overrightarrow{\upsilon_1}$ και της γραμμικής ταχύτητας $\overrightarrow{\upsilon_\gamma}$. Το μέτρο υ_γ της γραμμικής ταχύτητας ισούται με το μέτρο υ_1 της ταχύτητας του κέντρου μάζας, αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ($\upsilon_\gamma = \omega R = \upsilon_1$). Οι δύο αυτές ταχύτητες σχηματίζουν γωνία $\hat{\theta}$, η οποία είναι συμπληρωματική της γωνίας $\hat{\varphi}$. Άρα συνθ=ημφ=0,6. Ισχύει:



$$\upsilon_Z^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_\gamma^2 + 2\cdot\upsilon_1\cdot\upsilon_\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow 16^2\cdot 5 = \upsilon_1^2 + \upsilon_1^2 + 2\cdot\upsilon_1^2\cdot 0{,}6 \Leftrightarrow \upsilon_1 = 20\ m/s$$

Δ5. Πρώτα θα υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία φτάνει η σφαίρα στη θέση Δ, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση Α στη θέση Δ. Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας στη θέση Α είναι $\omega_A = \frac{\upsilon_A}{R} = \frac{20}{0{,}2} = 100$ r/s. Θέτουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το κέντρο της σφαίρας, όταν αυτή είναι στη θέση Α.

$E_{\mu\eta\chi,A}=E_{\mu\eta\chi,\Delta} \Leftrightarrow K_A+U_A=K_\Delta+U_\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_A^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_\Delta^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_\Delta^2 + m\cdot g\cdot(R_3 - R) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\cdot 70\cdot 20^2 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}24\cdot 100^2 = \frac{1}{2}\cdot 70\cdot\upsilon_\Delta^2 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}24\cdot(\frac{\upsilon_\Delta}{0{,}2})^2 + 70\cdot 10\cdot(\frac{1529}{70} - 0{,}2) \Leftrightarrow$

$14000 + 6200 = 35\cdot\upsilon_\Delta^2 + 15{,}5\cdot\upsilon_\Delta^2 + 15290 - 140 \Leftrightarrow 5050 = 50{,}5\cdot\upsilon_\Delta^2 \Leftrightarrow \upsilon_\Delta = 10$ m/s.

Όταν η σφαίρα φύγει πάνω από τη θέση Δ, δεν μεταβάλλεται η γωνιακή της ταχύτητα ($\omega=\omega_\Delta$=σταθ) διότι $\Sigma\tau_{(O)}=0$. Εφαρμόζουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη σφαίρα, από τη θέση Δ έως τη θέση Ν μεγίστου ύψους, στην οποία υ=0:

$K_N - K_\Delta = W_{ολ} \Leftrightarrow 0 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_N^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_\Delta^2 - \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_\Delta^2 = -m\cdot g\cdot h \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_\Delta^2 = -m\cdot g\cdot h \Leftrightarrow h = \frac{100}{20}$

$\Leftrightarrow h = 5$ m.